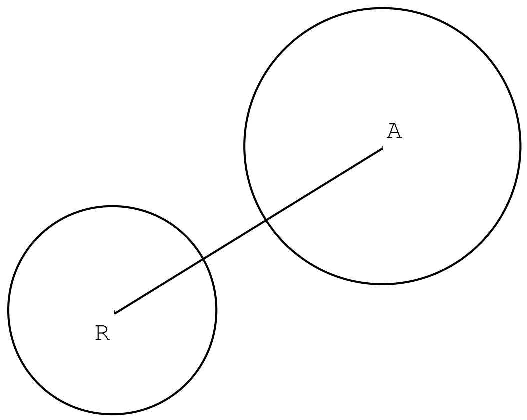
I) Inégalité triangulaire .

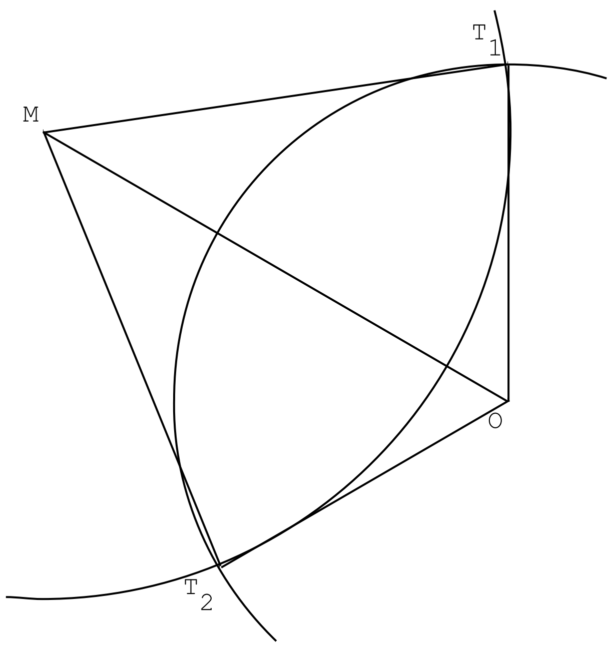
1) Mise en évidence.

Construire les cinq triangles suivants à l'aide de votre compas.

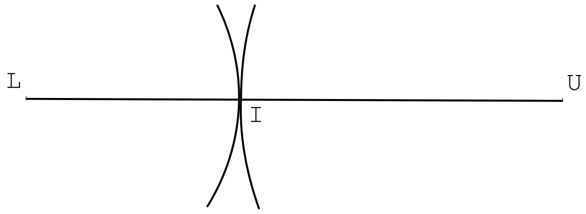
Le triangle RAT tel que RA = 9 cm , AT = 4 cm , RT = 3 cm



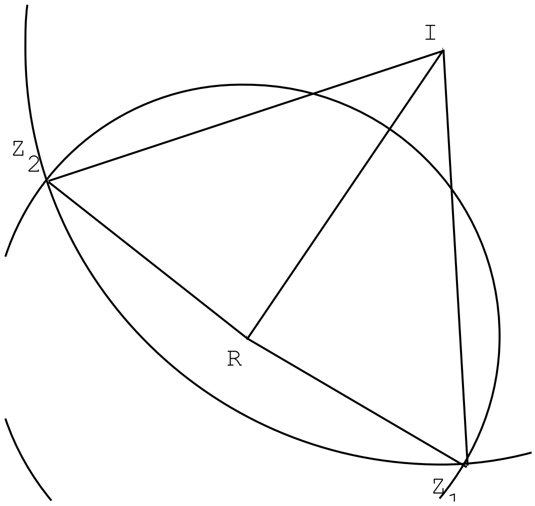
Le triangle MOT tel que MO = 8 cm , OT = 5 cm , MT = 7 cm



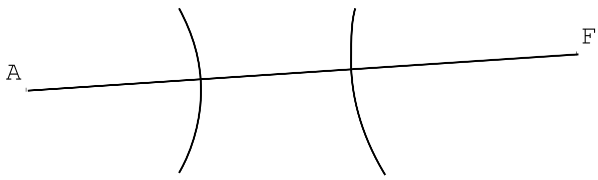
Le triangle LUI tel que LU = 10 cm , UI = 6 cm , LI = 4 cm



Le triangle RIZ tel que RI = 7,5 cm , IZ = 9 cm , RZ = 5,5 cm



Le triangle FAX tel que FA = 11 cm , AX = 3, 5 cm , FX = 4, 5 cm

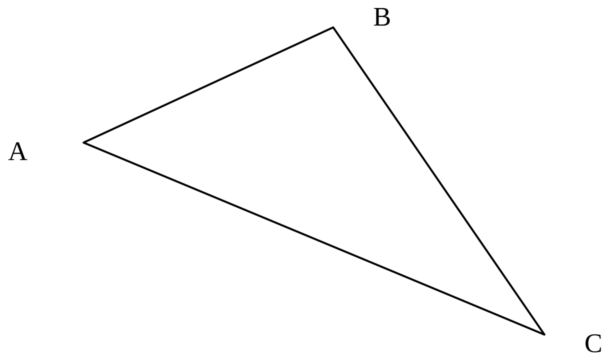


Que remarque-t-on ? Quelles semblent être les conditions pour qu'un triangle existe ?

Il faut que la longueur d'un côté pris au hasard soit inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

2) Enoncé.

Prop : Dans un triangle, la longueur de chaque côté est toujours inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.



Dans un triangle ABC, on a toujours :
AB < BC + AC
BC < AB + AC
AC < AB + BC

! Remarque : Dans la pratique, on vérifie cette relation seulement pour le plus grand des côtés. (En effet, elle est alors vérifiée automatiquement pour les deux autres.)

Exemples :

Voici les dimensions de plusieurs triangles à construire. Lesquelles sont cohérentes ?

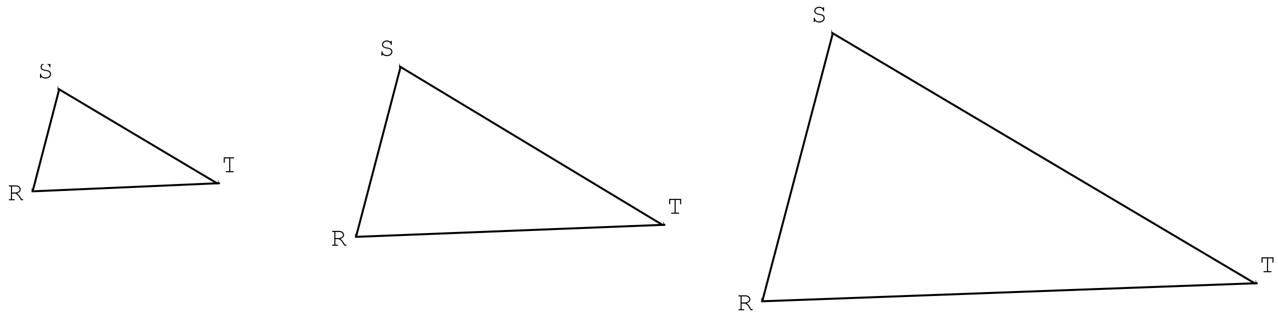
4 ; 20 ; 8 Impossible : 20 > 4 + 8
8 ; 6 ; 2 Impossible : 8 = 6 + 2 les trois points sont alignés
11 ; 13 ; 7 Possible : 13 < 11+7

II) Construction de triangles.

1) Données nécessaires pour construire un triangle.

Pour pouvoir construire un triangle, il est nécessaire d'avoir 3 données :
- Soit les longueurs des 3 côtés
- Soit les longueurs de 2 côtés et la mesure d' un angle
- Soit la longueur d'un côté et la mesure de deux angles.

! Remarque : Si on nous donne 3 mesures d'angles, il y a une infinité de tailles possibles pour la construction de ce triangle.



! Remarque : Il est le plus souvent nécessaire de faire une figure « projet » à main levée, qui n’est pas en vraie grandeur, sur laquelle on fait apparaître toutes les données, à partir de laquelle on construit la vraie figure.

2) Exemples simples :

a) Connaissant les longueurs des trois côtés :

On utilise la règle et le compas

- Construire un triangle ABC tel que AB = 8 cm ; BC = 6 cm et AC = 5cm

Figure projet à main levée

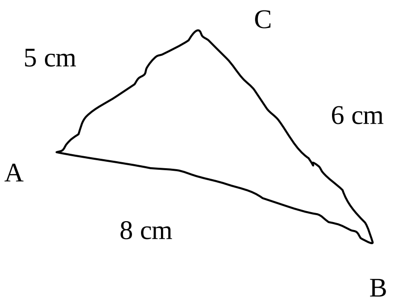
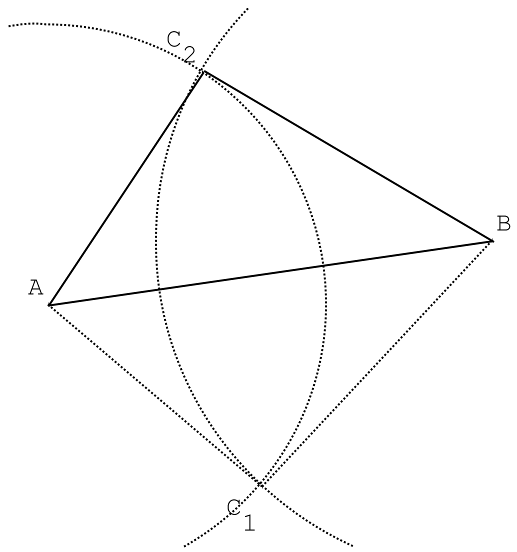


Figure en vraie grandeur

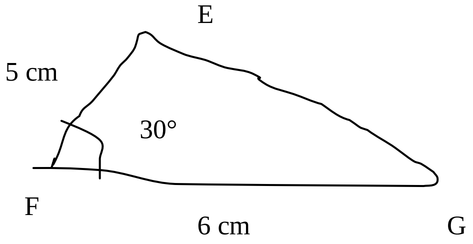


b) Connaissant un angle et les longueurs de ses deux côtés :

On utilise la règle et le rapporteur

- Construire un triangle EFG tel que EF = 5 cm ; FG = 6 cm et $\widehat{EFG} = 30°$

Figure projet à main levée | Figure en vraie grandeur

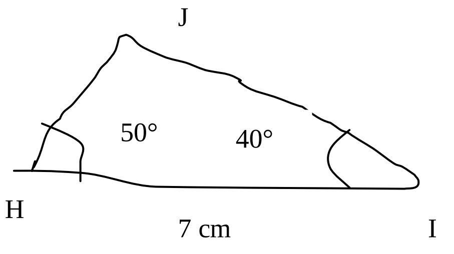


c) Connaissant deux angles et la longueur de leur côté commun.

On utilise la règle et le rapporteur.

- Construire un triangle HIJ tel que HI = 7 cm ; $\widehat{IHJ} = 50°$ et $\widehat{HIJ} = 40°$

Figure projet à main levée | Figure en vraie grandeur



2) Exemples plus complexes :

- Construire un triangle PIS tel que PI = 7 cm ; SI = 5 cm et $\widehat{PSI} = 110°$

Figure projet à main levée

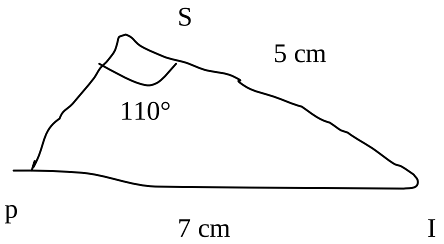


Figure en vraie grandeur

- Construire un triangle isocèle TER de sommet principal T, tel que TE = 6 cm et ER = 8 cm

Figure projet à main levée

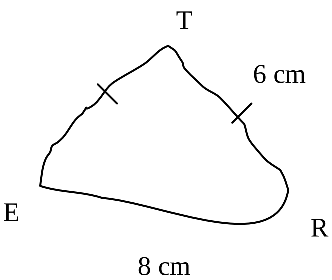
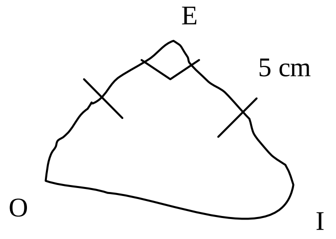


Figure en vraie grandeur

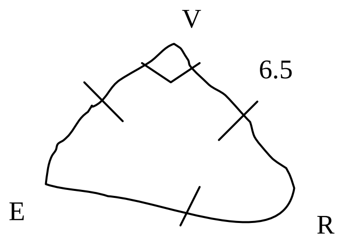
- Construire un triangle OIE isocèle rectangle de sommet E, tel que EO = 5 cm

Figure projet à main levée | Figure en vraie grandeur



- Construire un triangle VER équilatéral, de côté 6.5 cm

Figure projet à main levée | Figure en vraie grandeur



III) Hauteurs d'un triangle . Aire d'un triangle.

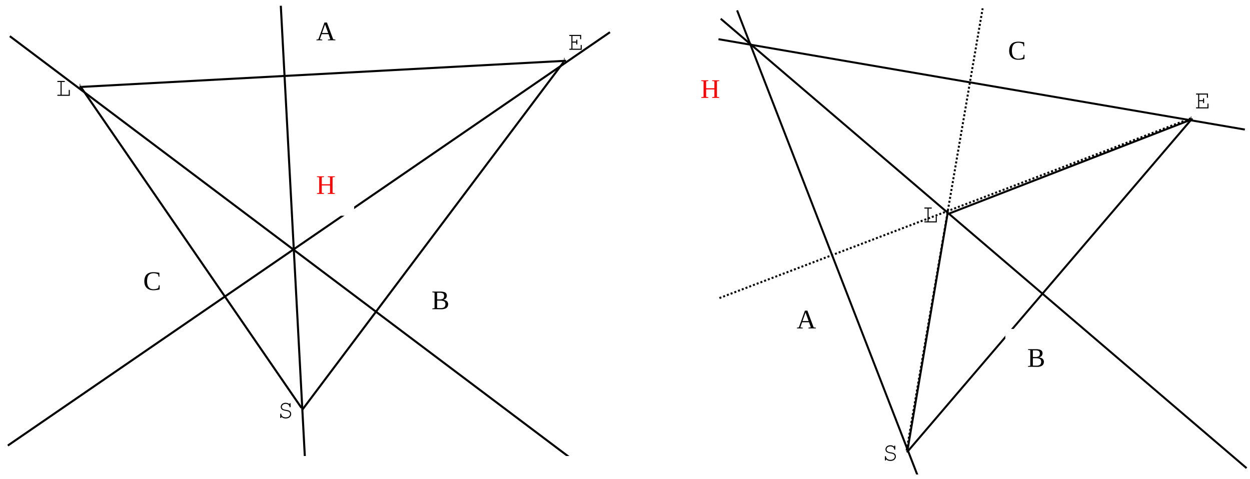
1) Hauteurs dans un triangle.

Df: Dans un triangle, une hauteur est une droite passant par un sommet, et perpendiculaire au côté opposé.

! Remarque : On utilise le même mot pour la droite , pour le segment correspondant et pour sa longueur.

! Remarque : Il y a trois hauteurs dans un triangle. Elles sont concourantes en un point qui est appelé l'orthocentre du triangle.

! Remarque : Lorsque le triangle est aplati, il faut prolonger deux côtés pour construire deux des hauteurs.

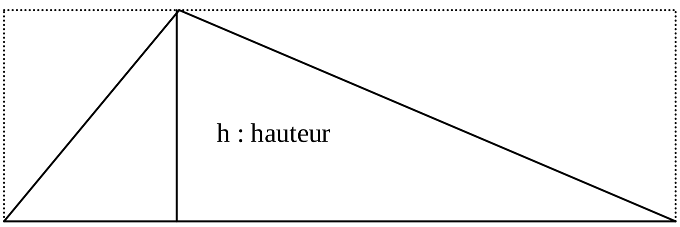


Dans les deux cas, dans le triangle LES,

(SA) est la hauteur issue de S ou encore la hauteur relative à (LE)
(LB) est la hauteur issue de L ou encore la hauteur relative à (SE)
(EC) est la hauteur issue de E ou encore la hauteur relative à (LS)

2) Aire d'un triangle.

a) Formule:



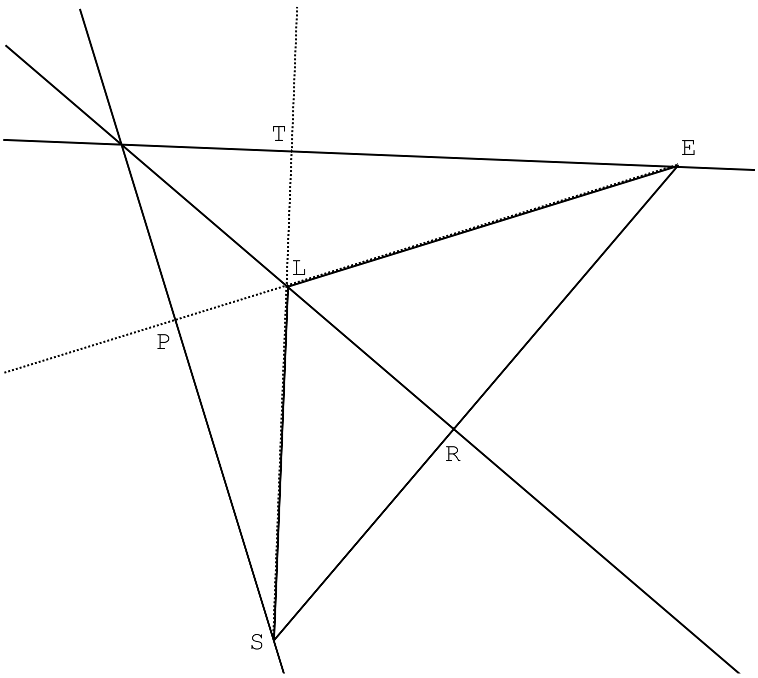
Aire du grand rectangle : $L \times l$
Le triangle a une aire qui vaut la moitié du grand rectangle, donc son aire est $\frac{L \times l}{2}$

ou encore $\frac{b \times h}{2}$

Aire d'un triangle de hauteur h et de base b : $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{b \times h}{2}$

b) Applications:

- Calculer une valeur approchée de la hauteur du triangle ci- dessous de trois façons différentes à partir de mesures faites sur la figure.



$\frac{SE \times LR}{2} = \frac{4.8 \times 1.7}{2}$

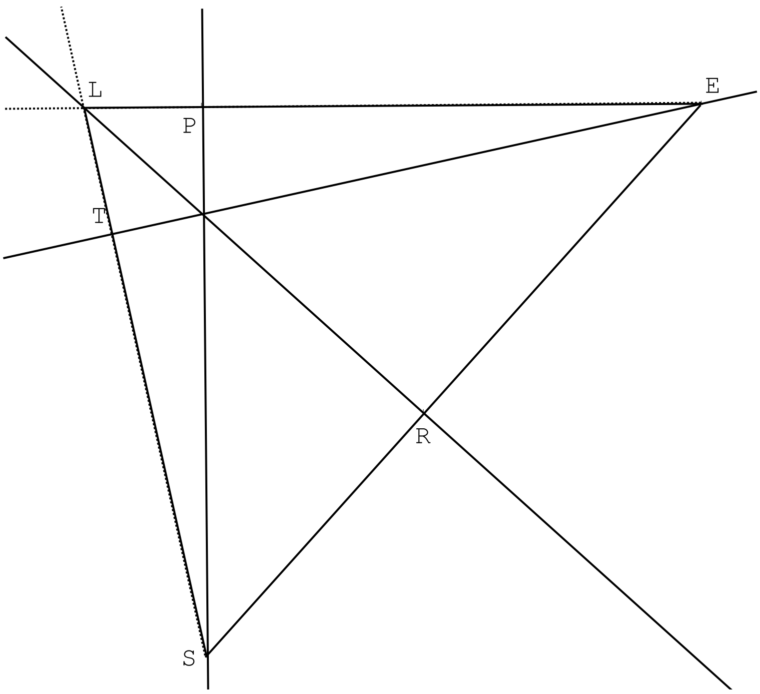
$\approx$ 4,08 cm²

$\frac{LS \times ET}{2} = \frac{2.7 \times 3}{2}$

$\approx$ 4,05 cm²

$\frac{LE \times SP}{2} = \frac{3.1 \times 2.6}{2}$

$\approx$ 4,03 cm²



$$\frac{SE \times LR}{2} = \frac{5.3 \times 3.3}{2} \approx 8.74 \text{ cm}^2$$

$$\frac{LS \times ET}{2} = \frac{4 \times 4.3}{2} \approx 8.6 \text{ cm}^2$$

$$\frac{LE \times SP}{2} = \frac{4.4 \times 3.9}{2} \approx 8.58 \text{ cm}^2$$

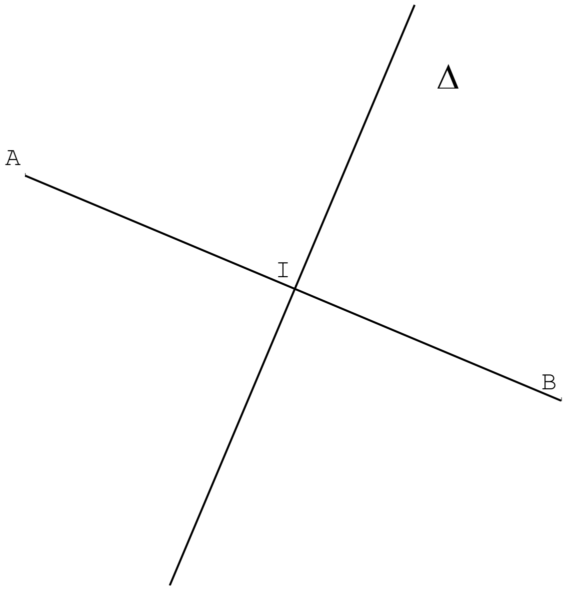
IV) Cercle circonscrit à un triangle :

1) Médiatrice d'un segment :

a) Rappel de la définition :

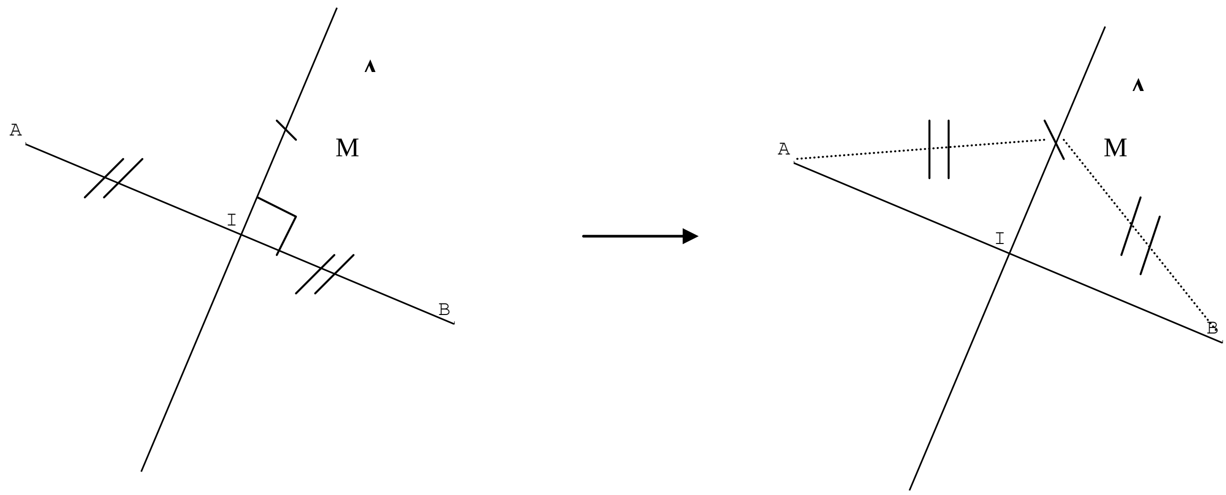
Df : La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment, passant par son milieu.

Construction à l'équerre :



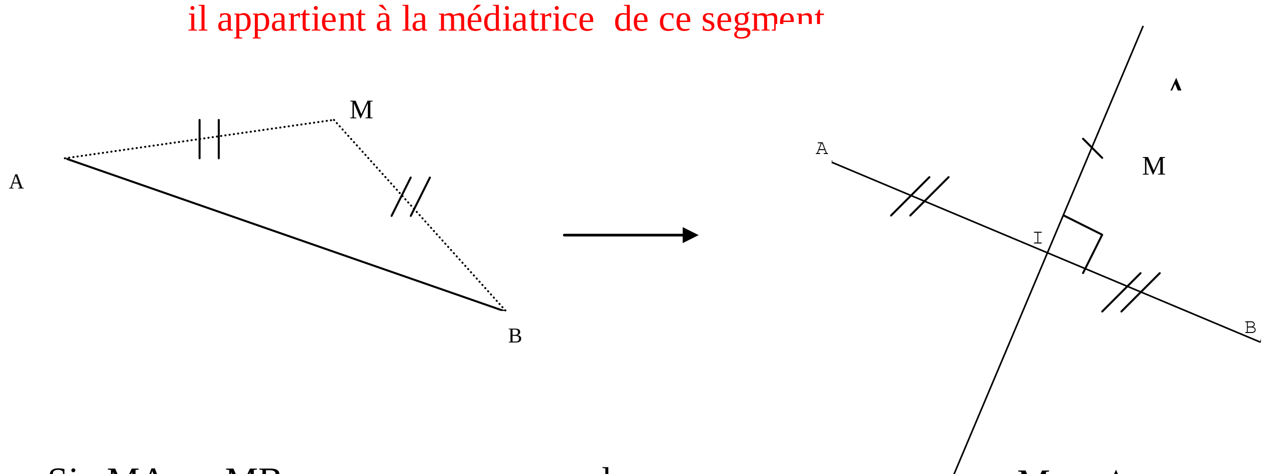
b) Propriété caractéristique en deux parties :

Prop 1 : Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.



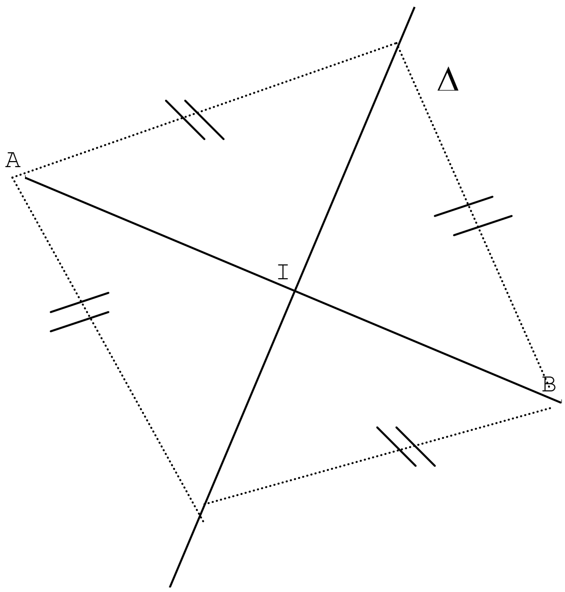
Si $M \in \Delta$ alors $MA = MB$

Prop 2 : Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment.



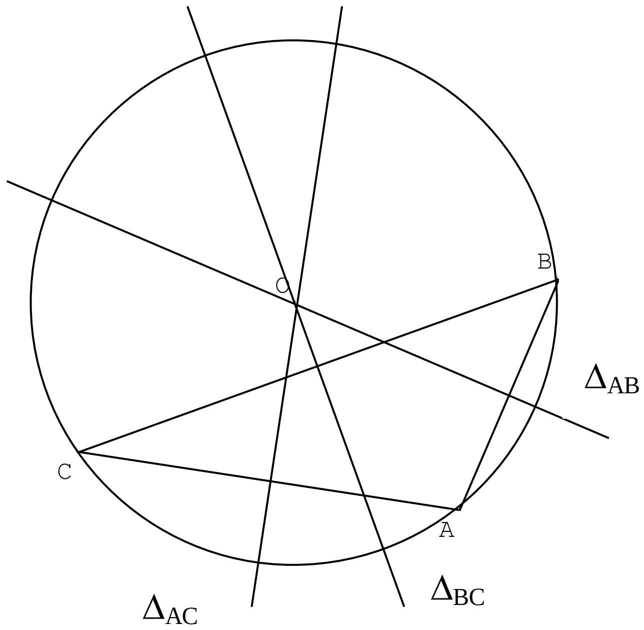
Si $MA = MB$ alors $M \in \Delta$

Construction au compas :



2) Cercle circonscrit à un triangle :

Soit un triangle ABC quelconque. Traçons les trois médiatrices de ses côtés. Que remarque-t-on ?



Les trois médiatrices se coupent en un seul point : O
On dit qu'elles sont concourantes.

Démonstration :

Les deux premières médiatrices sont sécantes en O.
O $\in \Delta_{AB}$ donc OA = OB
O $\in \Delta_{BC}$ donc OB = OC
donc OA = OB = OC
donc OA = OC donc O $\in \Delta_{AC}$
donc O est le point de concourt des trois médiatrices.

Puisque OA = OB = OC, les trois points A, B et C appartiennent au même cercle de centre O. On dit qu'ils sont cocycliques.
Ce cercle est appelé le cercle circonscrit au triangle ABC.

Prop : Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre de son cercle circonscrit.

! Remarque : Pour tracer le cercle circonscrit à un triangle, on trace ses médiatrices pour trouver leur point de concours, puis on trace le cercle ayant pour centre ce point de concourt, et passant par un des sommet du triangle.